SUITES NUMÉRIQUES

Jean Chanzy

Université de Paris-Sud *

1 Généralités sur les suites :

1.1 Définition d'une suite :

Définition 1 *Une suite numérique est une fonction dont la variable est entière, c'est-à-dire :*

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto f(n) = u_n. \end{array}$$

Remarques sur les notations et la terminologie :

1. Comme la variable est entière, les images $f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont des réels isolés auxquels on donne un numéro appelé **« indice »** ou **« rang »** du terme $f(n)$ de la suite. Le $(n+1)$*ième* terme de la suite est noté u_n.
2. Une suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).
3. Une suite peut être notée comme un ensemble $A = \{u_0; u_1; u_2; \ldots; u_{n-1}; u_n; u_{n+1}; \ldots\}$.

♣

1.2 Génération d'une suite :

Il existe deux modes de génération d'une suite :

1. par une fonction f définie sur $[0, +\infty[$, c'est-à-dire $u_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
2. par une **« relation de récurrence »** $u_{n+1} = g(u_n)$, où g est une fonction numérique plus ou moins simple qui relie deux termes consécutifs quelconques de la suite. Chaque terme peut être alors calculé de proche en proche à partir du terme précédent.

1.3 Sens de variation d'une suite :

Définition 2

1. *Une suite (u_n) est dite strictement croissante (respectivement croissante) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ (respectivement $u_{n+1} \geq u_n$),*
2. *une suite (u_n) est dite strictement décroissante (respectivement décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ (respectivement $u_{n+1} \leq u_n$),*
3. *une suite (u_n) est dite stationnaire ou constante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.*

Remarques : Pour montrer qu'une suite (u_n) est croissante ou décroissante, on peut utiliser l'une des trois méthodes suivantes, selon les cas :

1. On calcule $u_{n+1} - u_n$, et on étudie son signe, suivant les valeurs de n.

*Université de Paris-Sud,Bâtiment 425;F-91405 Orsay Cedex

2. Si la suite (u_n) est définie par une fonction f, c'est-à-dire si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. La suite (u_n) varie alors dans le même sens que f.
3. On vérifie que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, la suite (u_n) est décroissante, si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, la suite (u_n) est croissante.

♣

1.4 Suite majorée, suite minorée, suite bornée :

Définition 3

1. *Une suite (u_n) est dite majorée (par $M \in \mathbb{R}$) s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$,*
2. *Une suite (u_n) est dite minorée (par $m \in \mathbb{R}$) s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$,*
3. *Une suite (u_n) est dite bornée (par $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$) s'il existe des réels m et M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$.*

Remarque : *Une suite peut être majorée, minorée ou bornée seulement à partir d'un certain rang n_0.* ♣

2 Suites arithmétiques et suites géométriques :

Les exemples les plus simples de suites définies par une relation de récurrence sont les suites arithmétiques et les suites géométriques :

2.1 Suites arithmétiques :

Définition 4 *Une suite (u_n) est dite arithmétique si chacun de ses termes se déduit du précédent en lui ajoutant un réel r constant (c'est-à-dire indépendant de n), appelé la* ***« raison »*** *:*

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = u_n + r. \end{cases}$$

Propriétés des suites arithmétiques :

1. ***Terme de rang n :*** *$u_n = u_0 + nr$, si la suite commence à $n = 0$, $u_n = u_p + (n-p)r$, si la suite commence à $n = p$ ($p \in \mathbb{N}$),*
2. ***Somme des $n+1$ premiers termes :*** *Si on calcule la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} u_k$, on obtient $S_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$. On peut généraliser à une somme quelconque de termes consécutifs :*

$$\Sigma_p^n = \sum_{k=p}^{k=n} u_k = (n-p+1)\left(\frac{u_p + u_n}{2}\right),$$

3. *Une suite arithmétique est strictement croissante si sa raison r est positive ($r > 0$), stationnaire si $r = 0$, et décroissante si $r < 0$.*

2.2 Suites géométriques :

Définition 5 *Une suite (u_n) est dite géométrique si chacun de ses termes se déduit du précédent en le multipliant par un réel q constant (c'est-à-dire indépendant de n), appelé la **« raison »** :*

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = q \times u_n. \end{cases}$$

Propriétés des suites géométriques :

1. ***Terme de rang*** n ***:*** $u_n = u_0 \times q^n$, *si la suite commence à* $n = 0$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$, *si la suite commence à* $n = p$ $(p \in \mathbb{N})$,
2. ***Somme des*** $n+1$ ***premiers termes :*** *Si on calcule la somme* $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$, *on obtient* $S_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$, *si* $0 < |q| < 1$, *et* $S_n = u_0 \left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \right)$, *si* $|q| > 1$. *On peut généraliser à une somme quelconque de termes consécutifs :*

$$\Sigma_p^n = \sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_0 \times q^p \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \right) = u_0 \times q^p \left(\frac{q^{n-p+1}-1}{q-1} \right),$$

3. *Une suite géométrique de raison* $q \geq 0$ *est strictement croissante si* $q > 1$, *stationnaire si* $q = 0$ *ou* $q = 1$, *et décroissante si* $q < 1$. *Si* $q < 0$, *la suite est alternée, c'est-à-dire que ses termes consécutifs sont alternativement positifs et négatifs, et la suite n'est ni croissante ni décroissante.*

3 Raisonnement par récurrence :

Le raisonnement par récurrence est utilisé pour démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$, dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$ est vraie $\forall n$. Il y a deux étapes dans une démonstration par récurrence :

1. Initialisation : On démontre que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, en prenant pour n la plus petite valeur possible de n, ici $n = 0$.
2. Propriété héréditaire : On démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ *vraie* $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ *vraie*.

Remarque : Il y a deux variantes possibles dans la démonstration par récurrence :

1. La propriété peut n'être vraie qu'à partir du rang n_0, et donc l'initialisation se fait à partir de $n = n_0$.
2. L'hypothèse de récurrence peut être $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie, et ainsi la propriété héréditaire se démontre de la manière suivante :

$$(\forall k \in \mathbb{N};\ 0 \leq k \leq n;\ \mathcal{P}(k)\ \textit{vraie}) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\ \textit{vraie}$$

♣

4 Limite d'une suite :

4.1 Convergence d'une suite :

Définition 6

1. *On dit que la suite* (u_n) *converge vers* L *si tout intervalle ouvert contenant* L *contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Mathématiquement, on écrit :*

$$\exists L \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0,\ L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon,$$

2. *si la suite (u_n) ne converge pas, elle est divergente, c'est-à-dire que soit elle n'a pas de limite (par exemple $u_n = (-1)^n$), soit elle a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ (par exemple $u_n = n^2$).*
3. *on dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert du type $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Mathématiquement, on écrit :*

$$\forall A > 0,\ \exists n_0(A) \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0,\ u_n > A,$$

4. *on dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert du type $]-\infty, -A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Mathématiquement, on écrit :*

$$\forall A > 0,\ \exists n_0(A) \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0,\ u_n < -A,$$

Propriétés de convergence des suites :

1. *Les théorèmes généraux sur les opérations sur les limites de fonctions numériques s'appliquent aux opérations sur les limites de suites.*
2. ***« Théorème des gendarmes »*** *: Soient (u_n), (v_n), et (w_n) trois suites numériques.*
   - *Si à partir d'un certain rang n_0, $v_n \leq u_n \leq w_n$), et (v_n) et (w_n) convergent toutes les deux vers $L \in \mathbb{R}$, alors (u_n) aussi converge vers L,*
   - *si à partir d'un certain rang n_0, $u_n \geq v_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$,*
   - *si à partir d'un certain rang n_0, $u_n \leq v_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$,*
3. ***Cas d'une suite arithmétique :*** *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r,*
   - *si $r > 0$, la suite est divergente vers $+\infty$,*
   - *si $r < 0$, la suite est divergente vers $-\infty$,*
   - *si $r = 0$, la suite est convergente vers son premier terme u_0,*
4. ***Cas d'une suite géométrique :*** *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q,*
   - *si $q > 1$, la suite est divergente vers $+\infty$,*
   - *si $0 \leq |q| < 1$, la suite est convergente vers 0,*
   - *si $q = 1$, la suite est convergente vers son premier terme u_0,*
   - *si $q < -1$, la suite n'a pas de limite.*

4.2 Image d'une suite par une fonction :

Théorème 1

1. *Si la suite (u_n) converge vers $L \in \mathbb{R}$, pour toute fonction f définie sur un intervalle ouvert $I(\subset \mathbb{R})$ contenant L, et continue en L, la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(L)$,*
2. *si la suite (u_n) converge vers $L \in \mathbb{R}$, pour toute fonction f définie sur un intervalle ouvert $I(\subset \mathbb{R})$ contenant L, telle que $\lim\limits_{x\to L} f(x) = +\infty$, la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ diverge vers $+\infty$,*
3. *si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, pour toute fonction f définie sur un intervalle ouvert du type $[A, +\infty[$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ converge vers L,*
4. *si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, pour toute fonction f définie sur un intervalle ouvert du type $[A, +\infty[$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ diverge vers $+\infty$,*

Remarques :

1. Le théorème précédent est l'équivalent pour les suites du théorème de composition des limites pour les fonctions,
2. si une suite (u_n) converge vers l, et si elle est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = g(u_n)$, où g est une fonction définie sur un intervalle ouvert $I(\subset \mathbb{R})$ contenant l, et continue en l, alors l vérifie l'égalité $l = g(l)$.

♣

4.3 Convergence d'une suite monotone :

Théorème 2

1. *Toute suite croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$ est convergente vers un réel $L \leq M$,*
2. *toute suite décroissante et minorée par $m \in \mathbb{R}$ est convergente vers un réel $L \geq m$.*

Théorème 3

1. *Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$,*
2. *toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.*

Démonstration de *1.* : Soient (u_n) une suite croissante et non majorée et A un réel arbitraire. Comme cette suite est non majorée, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > A$. Pour $n > p$, comme la suite est croissante, $u_n > u_p > A$, donc $\forall n \geq p$, $u_n > A$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ □

5 Suite récurrente $u_{n+1} = au_n + b$:

Soit (u_n) une suite récurrente définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$. On suppose que $a \neq 0$, $a \neq 1$, et $b \neq 0$. En effet, si $a = 0$, la suite (u_n) est stationnaire et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = b$, si $a = 1$, la suite (u_n) est arithmétique, de raison b, et si $b = 0$, la suite (u_n) est géométrique, de raison a. Ces trois derniers cas ont déjà été étudiés et sont sans intérêt ici.

On peut considérer que $u_{n+1} = g(u_n)$, g étant la fonction affine $g(x) = ax + b$.

On appelle « point fixe »de g tout nombre l tel que $g(l) = l$, c'est-à-dire toute solution de l'équation $g(x) - x = 0$. La fonction g a donc ici un point fixe unique qui vaut $l = \dfrac{b}{1-a}$.

On a successivement $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - l = a(u_n - l)$, donc la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - l$ est géométrique de raison a, $u_n = l + (u_0 - l)a^n$, et $u_{n+1} - u_n = (a-1)u_n + b = (a-1)(u_n - l)$. Cinq cas se présentent :

1. Si $a > 1$, et la suite (u_n) est minorée par $l = \dfrac{b}{1-a}$ à partir d'un certain rang, elle est croissante. Dans ce cas, elle n'est pas majorée et elle diverge vers $+\infty$,
2. si $0 < a < 1$, et la suite (u_n) est majorée par $l = \dfrac{b}{1-a}$ à partir d'un certain rang, elle est croissante. Dans ce cas, elle converge vers un réel l tel que $l = al + b$, donc vers $l = \dfrac{b}{1-a}$,
3. si $a > 1$, et la suite (u_n) est majorée par $l = \dfrac{b}{1-a}$ à partir d'un certain rang, elle est décroissante. Dans ce cas, elle n'est pas minorée et elle diverge vers $-\infty$,
4. si $0 < a < 1$, et la suite (u_n) est minorée par $l = \dfrac{b}{1-a}$ à partir d'un certain rang, elle est décroissante. Dans ce cas, elle converge vers un réel l tel que $l = al + b$, donc vers $l = \dfrac{b}{1-a}$
5. si $a < 0$, comme $u_{n+1} - l = a(u_n - l)$, les termes successifs de la suite sont alternativement plus grands et plus petits que l, donc la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante, et deux cas se présentent :
   - Si $-1 < a < 0$, la suite (u_n) converge vers l,
   - si $a \leq -1$, la suite (u_n) n'a pas de limite.

6 Suites adjacentes :

Définition 7 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.*

Théorème 3 *Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite L.*
Démonstration : Soient deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles que (u_n) soit croissante, (v_n) décroissante et $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$. Montrons d'abord qu'à partir d'un certain rang n_0, $v_n \geq u_n$, puis que les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers L et L', enfin que $L = L'$:

1. **« $\mathbf{v_n \geq u_n}$ »** : Soit (w_n) la suite définie par $w_n = v_n - u_n$. On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1})$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et $u_n - u_{n+1} \leq 0$, puisque (v_n) est décroissante et (u_n) croissante. Donc la suite (w_n) est décroissante. De plus, elle converge vers 0, d'après les hypothèses du théorème. On a donc, à partir d'un certain rang n_0, $w_n \geq 0$, et donc $v_n \geq u_n$.
2. **« $\mathbf{(u_n)}$ et $\mathbf{(v_n)}$ convergent »** : $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Comme (v_n) est décroissante, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_{n_0}$. La suite (v_n) est donc décroissante et minorée, donc elle converge vers une limite L' telle que $L' \geq u_{n_0}$.
   De même, (u_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_{n_0}$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée, donc elle converge vers une limite L telle que $L \leq v_{n_0}$. De plus, on a $L \leq L'$.
3. **« $\mathbf{L = L'}$ »** : On sait que $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0 = L' - L$, donc $L = L'$.

□