DÉRIVATION

Jean Chanzy

Université de Paris-Sud *

1 Nombre dérivé :

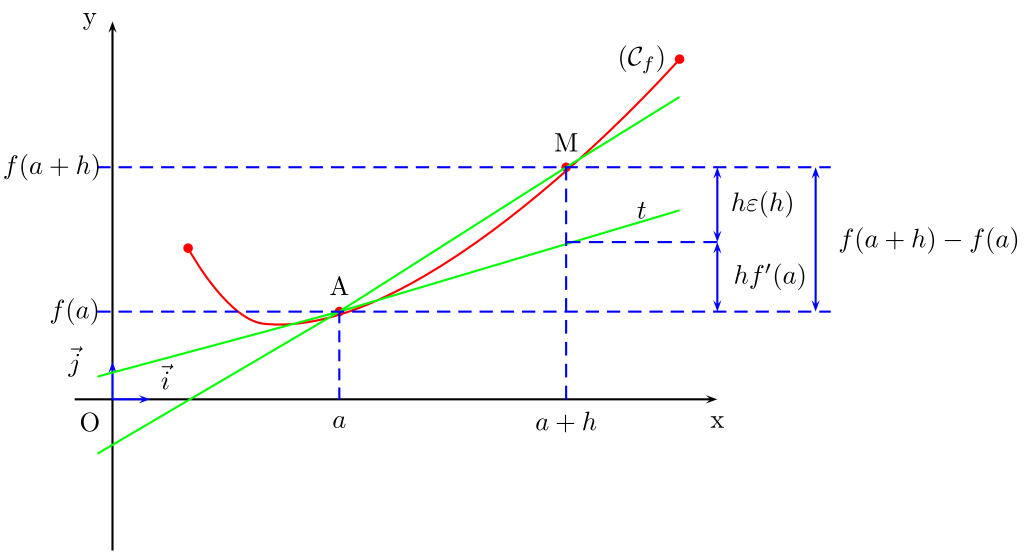
1.1 Dérivabilité en un point :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I ouvert, et trois réels a, h et x tels que $a \in I$, $a + h \in I$ et $x \in I$.

Définition 1.1. *La fonction f est dite dérivable en a si le taux de variation de f de a à $a + h$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, a une limite finie quand h tend vers 0, de sorte que $h \neq 0$. Si cette limite existe, on l'appelle le nombre dérivé de f en a et on la note $f'(a)$.*

Mathématiquement, on écrit :

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



Remarque : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe de f. ♣

1.2 Équation de la tangente (At) :

La tangente à la courbe de f en A a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

*Université de Paris-Sud,Bâtiment 425;F-91405 Orsay Cedex

1.3 Exemples de fonctions non dérivables en un point :

1. La limite du taux de variation est infinie :
   La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. En effet, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$, et $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = +\infty$. Mais comme la fonction est définie en 0, la tangente à la courbe en 0 est verticale.

2. Il existe une dérivée à droite et une dérivée à gauche, mais elles sont différentes :
   Si $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite notée $f'(a^+)$, et $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite notée $f'(a^-)$, avec $f'(a^+) \neq f'(a^-)$, f n'est pas dérivable en a. Mais f possède une dérivée à droite et une dérivée à gauche, qui sont différentes. Graphiquement, la courbe de f présente un point anguleux. Exemple : la courbe de la fonction $f(x) = |x|$ présente en 0 un point anguleux, et cette fonction n'est pas dérivable en 0.

3. Le taux de variation n'a pas de limite :
   La fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) & = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{, si } x \neq 0 \text{, et} \\ f(0) & = 0 \end{cases}$$

   n'est pas dérivable en 0. En effet, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$, qui n'a pas de limite pour $h \to 0$.

1.4 Application linéaire tangente :

Théorème 1 *Une fonction f est dérivable en $a \in I$ si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon(h)$ telle que $\forall h \in \mathbb{R}$, avec $a+h \in I$, $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$, avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.*

Remarque : On peut alors approcher $f(a+h)$ par $f(a) + hf'(a)$, avec une erreur de l'ordre de $h\varepsilon(h)$. ♣

Définition 1.2. *La fonction $h \mapsto hf'(a)$ s'appelle l'application linéaire tangente de f en a.*

1.5 Méthode d'Euler :

C'est une méthode qui permet de construire une approximation par une « ligne brisée » de la courbe représentative d'une fonction, sans connaître l'expression de cette fonction, et en connaissant juste l'expression de sa dérivée et un point particulier de la courbe. Soit f une fonction dont on ne connaît que la dérivée f' et le point $A_0(x_0; f(x_0))$. On construit d'abord le point A_0 dans un repère, puis on choisit un pas h suffisamment petit pour obtenir une approximation convenable et on construit le point $A_1(x_0+h; f(x_0)+hf'(x_0))$. A_1 est supposé être un point de la courbe, mais on commet une erreur de l'ordre de $h\varepsilon(h)$ sur sa position. On construit ensuite $A_2(x_0+2h; f(x_0+h)+hf'(x_0+h))$, et ainsi de suite jusqu'au dernier point choisi $A_n(x_0+nh; f(x_0+(n-1)h)+hf'(x_0+(n-1)h))$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Pour chacun des points successifs, les erreurs s'accumulent donc, et pour avoir une précision convenable, si on prend un grand nombre de points d'approximation, on doit prendre un pas très petit. Pour avoir une approximation de la courbe, on joint chacun des points au suivant par un segment de droite, et on obtient une « ligne brisée » qui donne une idée de l'allure de la courbe.

2 Fonctions dérivées et notation différentielle :

2.1 Fonction dérivée :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I ouvert.

Définition 2.1. *Si f est dérivable en chaque point de l'intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.*

La définition précédente exprime la dérivabilité sur un intervalle ouvert du type $I =]\alpha, \beta[$. considérons maintenant l'intervalle fermé $J = [\alpha, \beta]$.

Définition 2.2. *On dit que f est dérivable sur J si f est dérivable sur $]\alpha, \beta[$, au sens de la définition précédente, et les deux dérivées à droite en α, $f'(\alpha^+)$, et à gauche en β, $f'(\beta^-)$, existent.*

Définition 2.3. *Si f est dérivable sur I, on appelle « fonction dérivée » de f la fonction notée f', qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x, soit $f'(x)$. Cette fonction est alors définie sur I. On la note :*

$$f' : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array}$$

2.2 Dérivées successives :

Définition 2.4. *Si la fonction dérivée de f est dérivable sur I, alors la dérivée de f' s'appelle la « dérivée seconde » de f, et on la note f''. On a alors $f'' = (f')'$.*

Définition 2.5. *Si la dérivée seconde f'' de f est dérivable sur I, alors la dérivée de f'' s'appelle la « dérivée troisième » ou « dérivée tierce » de f, et on la note f'''. On a alors $f''' = (f'')'$.*

Définition 2.6. *Si f est dérivable n fois sur I, alors la dérivée d'ordre n de f s'appelle la « dérivée nième » de f, et on la note $f^{(n)}$. On a alors $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, $\forall n \geq 4$, ($n \in \mathbb{N}$).*

2.3 Notation différentielle :

Définition 2.7. *La fonction dérivée de f se note aussi $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, ce qu'on peut écrire $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$. La fonction $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ s'appelle alors la différentielle de f en x.*

Remarques :

1. La notation $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ est un vrai quotient et permet de définir la différentielle $\mathrm{d}f(x)$ sous forme du produit $f'(x)\mathrm{d}x$.
2. La notation différentielle de la dérivée est essentielle en physique pour les calculs d'incertitude. Enfermons par exemple un gaz parfait dans une boîte fermée étanche de volume V, sous une pression p. Si T est la température du gaz à l'intérieur de la boîte (en degrés Kelvin), ce gaz vérifie alors la relation des gaz parfaits $pV = nRT$, où n est le nombre de moles du gaz contenu dans la boîte, et R la constante des gaz parfaits ($R = 8,314510$ Joules par mole et par degré Kelvin). Imaginons que V ne soit connu qu'à δV près et qu'on veuille connaître l'incertitude δp qui en résulte sur la pression p. Comme les deux erreurs sont liées, on doit considérer p comme une fonction de V, soit $p = \dfrac{nRT}{V}$, et calculer $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -\dfrac{nRT}{V^2}$, ce qui permet d'écrire $\mathrm{d}p = -\dfrac{nRT}{V^2}\mathrm{d}V$. Or $\mathrm{d}p$ et $\mathrm{d}V$ représentent des erreurs sur p et V parfaitement inconnues et même impossibles à connaître, mais on peut estimer ces erreurs au moyen d'un majorant de $|\mathrm{d}p|$ et de $|\mathrm{d}V|$. Ce majorant de $|\mathrm{d}V|$, on l'appelle δV, et celui de $|\mathrm{d}p|$, δp, et on calcule alors δp en fonction de δV par la relation $\delta p = \dfrac{nRT}{V^2}\delta V$. δV et δp représentent des incertitudes absolues, les quotients $\dfrac{\delta V}{V}$ et $\dfrac{\delta p}{p}$ étant des incertitudes relatives, qui vérifient d'ailleurs l'égalité $\dfrac{\delta p}{p} = \dfrac{\delta V}{V}$.

3. En physique, en particulier, on note souvent la dérivée seconde $f''(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$, mais cette fois-ci, ce n'est pas un vrai quotient et on ne peut pas dissocier numérateur et dénominateur. L'écriture doit rester sous forme de quotient. De même, on note parfois $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$, qui n'est pas non plus un vrai quotient.

♣

3 Dérivées des fonctions usuelles et opérations sur les dérivées :

3.1 Dérivées des fonctions usuelles :

f(x)	f'(x)	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k\ (k \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1/x$	$f'(x) = -1/x^2$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = 1/x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = -n/x^{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = 1/2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$

3.2 Opérations sur les dérivées :

On considère deux fonctions u et v définies et dérivables sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$, et un réel k quelconque.

1. La fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
2. La fonction $k \times u$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$.
3. La fonction $u \times v$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.
4. La fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en tout point x de I où $v(x) \neq 0$ et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
5. La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable en tout point x de I où $v(x) \neq 0$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$.

3.3 Dérivée d'une fonction composée :

On considère deux fonctions u et v, u définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et v définie en $u(x)$, $\forall x \in I$.

Théorème 2 *Si u est dérivable sur I et v est dérivable en $u(x)$, $\forall x \in I$, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I, et $\forall x \in I$, $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$, ce qui s'écrit aussi, en notation différentielle, $\dfrac{\mathrm{d}(v \circ u)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} \times \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, écriture plus facile à retenir.*

Démonstration : Comme u est dérivable en x, il existe une fonction $\varepsilon(h)$ telle que

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + h\varepsilon(h),$$

et $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Calculons $(v \circ u)(x + h)$:

$$\begin{aligned}(v \circ u)(x + h) &= v(u(x + h)) \\ &= v\left(u(x) + hu'(x) + h\varepsilon(h)\right)\end{aligned}$$

Posons $k = hu'(x) + h\varepsilon(h)$. On a alors $(v \circ u)(x+h) = v\,(u(x)+k)$, et comme v est dérivable en $u(x)$, il existe une fonction $\eta(k)$ telle que :

$$v\,(u(x)+k) = v(u(x)) + kv'(u(x)) + k\eta(k).$$

Or $k = hu'(x) + h\varepsilon(h)$, donc :

$$\begin{aligned}(v \circ u)(x+h) &= v(u(x)) + hv'(u(x))u'(x) + hv'(u(x))\varepsilon(h) + k\eta(k)\\ &= (v \circ u)(x) + hv'(u(x))u'(x) + h\left(v'(u(x))\varepsilon(h) + (u'(x)+\varepsilon(h))\eta(k)\right).\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$, $\lim\limits_{h\to 0} k = 0$, et donc si $\varphi(h) = v'(u(x))\varepsilon(h) + (u'(x)+\varepsilon(h))\eta(k)$, on a $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$. On obtient finalement :

$$(v \circ u)(x+h) = (v \circ u)(x) + hv'(u(x))u'(x) + h\varphi(h),$$

avec $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$, ce qui permet d'affirmer, par le théorème 1, que $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$. □

Ainsi, si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert, les fonctions $\cos(u)$, $\sin(u)$, et u^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont dérivables sur I. La fonction $\dfrac{1}{u^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur tout intervalle inclus dans I où u ne s'annule pas, et la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur tout intervalle inclus dans I où $u > 0$. Les dérivées correspondantes sont données dans le tableau suivant :

Fonction	$\cos(u)$	$\sin(u)$	u^n	$1/u^n$	$\sqrt{u}$
Dérivée	$-u' \times \sin(u)$	$u' \times \cos(u)$	$nu'u^{n-1}$	$-nu'/u^{n+1}$	$u'/2\sqrt{u}$

3.4 Relation entre dérivabilité et continuité :

Soient une fonction f, définie sur un intervalle I ouvert et $a \in I$.

Théorème 3 *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration : Si f est dérivable en a, alors il existe une fonction $\varepsilon(h)$ telle que $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Cette écriture montre immédiatement que $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, puisque $\lim\limits_{h\to 0} hf'(a) = \lim\limits_{h\to 0} h\varepsilon(h) = 0$. On vérifie ainsi directement la définition de la continuité de f au point a. □

Remarque très importante : **Attention ! ! !** La réciproque de ce théorème est fausse ! ! ! Par exemple la fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0. ♣

4 Applications des dérivées :

4.1 Nombre dérivé et limites usuelles :

Le nombre dérivé de certaines fonctions permet de calculer certaines limites de fonctions usuelles, quand la variable tend vers une valeur finie. Par exemple,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = \sin'(0) = \cos(0) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(0+h)-\exp(0)}{h} = \exp'(0) = \exp(0) = 1,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h} = \ln'(1) = 1,$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\cos(x)+1}{x-\pi} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(\pi+h)-\cos(\pi)}{h} = \cos'(\pi) = -\sin(\pi) = 0,$$

4.2 Sens de variation d'une fonction :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert.

Théorème 4 *Si la dérivée f' est nulle sur I, alors f est constante sur I,*
Si la dérivée f' est strictement positive sur I, sauf en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I,
Si la dérivée f' est strictement négative sur I, sauf en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

4.3 Extrema d'une fonction :

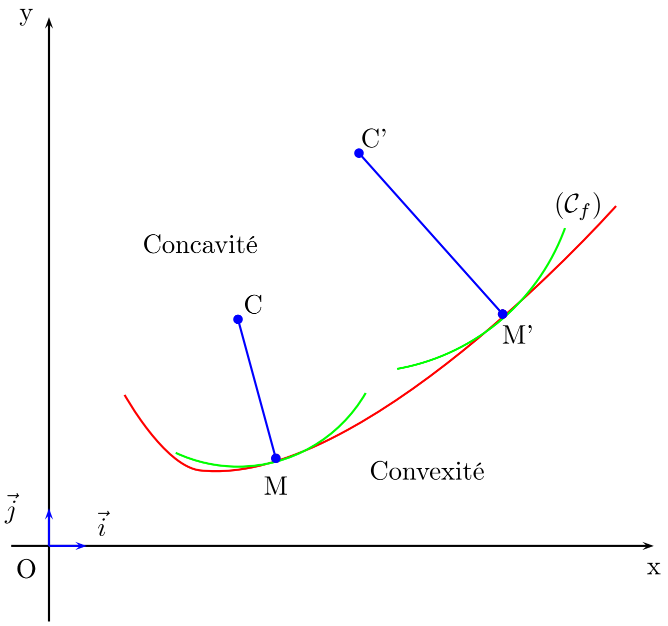
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert.

Théorème 5 (i) *La fonction f présente un extremum local (maximum ou minimum) égal à $f(a)$ en $x = a$ si sa dérivée f' s'annule en a en changeant de signe. Si $f'(x) < 0$ pour x proche de a et $x < a$, $f'(a) = 0$, et $f'(x) > 0$ pour x proche de a et $x > a$, alors $f(a)$ est un minimum local de f, atteint en $x = a$. Si $f'(x) > 0$ pour x proche de a et $x < a$, $f'(a) = 0$, et $f'(x) < 0$ pour x proche de a et $x > a$, alors $f(a)$ est un maximum local de f, atteint en $x = a$.*
(ii) *Le maximum global de f est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe, s'il existe. C'est $f(a)$ si $\forall x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. On dit alors qu'il est atteint en $x = a$.*
De même, Le minimum global de f est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe, s'il existe. C'est $f(a)$ si $\forall x \in I$, $f(x) \geq f(a)$. On dit alors qu'il est atteint en $x = a$.

Par exemple, la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ présente un minimum local et un minimum global qui valent 0 et qui sont atteints en $x = 0$, mais ne présente ni maximum local ni maximum global sur $\mathbb{R}$. La fonction $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ ne présente ni extremum local ni extremum global sur $\mathbb{R}$.

4.4 Point d'inflexion d'une fonction :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert. Localement près de n'importe quel point de la représentation graphique de cette fonction f, la courbe de f peut être assimilée à un cercle.



Définition 4.1. *On appelle « concavité » d'une courbe la partie du plan délimitée par la courbe, et qui contient tous les centres de courbure, (c'est-à-dire située à l'intérieur de la courbe). On appelle « convexité » d'une courbe la partie du plan délimitée par la courbe et située à l'extérieur de la courbe, (c'est-à-dire qu'elle ne contient pas les centres de courbure).*

Définition 4.2. *On appelle « point d'inflexion » d'une fonction un point de sa courbe représentative où la concavité change de sens. Cette concavité est d'abord dirigée vers le bas, puis après passage par le point d'inflexion, elle se dirige vers le haut, ou vice-versa.*

Théorème 6 *Si la dérivée seconde f'' de f s'annule en $x = a$ en changeant de signe, alors la courbe de f présente un point d'inflexion au point d'abscisse $x = a$.*

Par exemple, la courbe de la fonction $f(x) = x^3$ présente un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0$. La plupart des « cubiques » (courbes de fonctions dont l'expression est un polynôme du troisième degré) présentent également un point d'inflexion.

5 Plan d'étude d'une fonction :

On considère une fonction f dont on connaît l'expression explicite. N'importe quelle fonction sera toujours étudiée selon le plan suivant (se conformer cependant à l'énoncé du problème posé) :

1. **Ensemble de définition :** Déterminer d'abord l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, s'il n'est pas donné.
2. **Étude des symétries :** Regarder si la fonction f est périodique, ou paire, ou impaire, ou symétrique par rapport à un point ou à une droite.
   ****Rappels :***
   (a) Une fonction f est dite « T-périodique » si $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x+T) = f(x)$. T est appelée UNE période de f. Si T est une période de f, tout multiple de T est aussi une période de f. LA période de f est la plus petite période T_0 de f.
   Quand une fonction est T_0-périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude égale à T_0, et de tracer la courbe sur cet intervalle, puis de répéter le motif ainsi dessiné à l'infini, à droite et à gauche.
   (b) Une fonction f est dite « paire » si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
      i. L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$.
      ii. $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x)$.
   (c) Une fonction f est dite « impaire » si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
      i. L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$.
      ii. $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = -f(x)$.

   Quand une fonction est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur la moitié à valeurs positives ou nulles de son ensemble de définition, et de tracer sa courbe dans le demi-plan $\{x \geq 0\}$, puis de la symétriser par rapport à l'axe vertical si f est paire, et par rapport à l'origine O du repère si f est impaire.
   (d) La courbe d'une fonction f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = a$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
      i. L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f est symétrique par rapport à a, c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $a + x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow a - x \in \mathcal{D}_f$.
      ii. $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(a+x) = f(a-x)$.
   (e) La courbe d'une fonction f est symétrique par rapport au point $I(a;b)$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
      i. L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f est symétrique par rapport à a, c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $a + x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow a - x \in \mathcal{D}_f$.
      ii. $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(a+x) + f(a-x) = 2b$.

   Si la fonction f est périodique ou présente la moindre symétrie, il suffit d'étudier f sur une partie (sous-ensemble) de $\mathcal{D}_f$, que nous appellerons « ensemble d'étude » , noté E_f dans la suite.

3. **Limites et asymptotes :** Calculer les limites aux bornes de l'ensemble d'étude E_f, en particulier pour $+\infty$ et $-\infty$, et pour les valeurs interdites. Déterminer ensuite les asymptotes éventuelles à la courbe de f.
4. **Tableau de variation :** Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
5. **Tableau de valeurs :** Dresser un tableau de valeurs de f en utilisant une calculatrice programmable.
6. **Études des points particuliers :** Étudier les points particuliers tels que les extrema locaux et globaux, les tangentes en certains points, les points anguleux, les points d'inflexion, les points de discontinuité, les points où la fonction f n'est pas dérivable, les « points-limites » ...,etc,...
7. **Tracé de la courbe :** Tracer dans un repère d'abord les asymptotes, puis les tangentes aux points remarquables, et enfin la courbe de la fonction f.