SIMILITUDES DANS LE PLAN

Jean Chanzy

Université de Paris-Sud *

1 Transformations du plan :

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathcal{P}$ le plan habituel « $\mathbb{R}^2$ » en tant qu'ensemble de points M dont les coordonnées dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ sont des réels $(x;y)$.

Définition 1 :

1. *Une* ***Transformation* T** *du plan $\mathcal{P}$ est une fonction qui à tout point M du plan $\mathcal{P}$ associe un unique point M' noté $M' = T(M)$, et à tout point N' du plan $\mathcal{P}$ associe un unique point N tel que $T(N) = N'$,*
2. *Une* ***Transformation*** *du plan $\mathcal{P}$ est une bijection de $\mathcal{P}$ dans lui-même.*

Propriétés :

1. *Une transformation T admet une transformation réciproque notée T^{-1}, définie par :*

$$N = T^{-1}(M) \iff M = T(N),\ \forall M \in \mathcal{P},$$

2. *la composée de deux transformations du plan, T_1 suivie de T_2, est une transformation du plan, notée $T_2 \circ T_1$.* ***Attention !*** *: en général, $T_2 \circ T_1 \neq T_1 \circ T_2$,*
3. *la composition des transformations est associative. En effet, si T_1, T_2 et T_3 sont trois transformations du plan, alors $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$.*

Exemples :

1. *Les* ***translations****, les* ***homothéties****, les* ***rotations*** *et les* ***symétries (axiales et centrale)*** *sont des transformations du plan,*
2. *la* ***translation*** *de vecteur $\vec{u}$ a pour transformation réciproque la* ***translation*** *de vecteur $-\vec{u}$,*
3. *l'****homothétie*** *de centre Ω et de rapport k a pour transformation réciproque l'****homothétie*** *de même centre et de rapport $1/k$,*
4. *la* ***rotation*** *de centre Ω et d'angle θ a pour transformation réciproque la* ***rotation*** *de même centre et d'angle $-\theta$,*
5. *les* ***symétries (axiales et centrale)*** *ont elles-mêmes pour transformations réciproques.*

*Université de Paris-Sud,Bâtiment 425;F-91405 Orsay Cedex

2 Définition géométrique d'une similitude plane :

2.1 Triangles semblables :

Définition 2 :

1. *Deux triangles sont semblables ou ont la même forme si les angles de l'un sont respectivement égaux aux angles de l'autre,*
2. *deux triangles sont semblables ou ont la même forme si les côtés de l'un sont respectivement proportionnels aux côtés de l'autre.*

2.2 Similitudes planes :

Définition 3 :

1. *On appelle similitude plane toute transformation T du plan $\mathcal{P}$ qui conserve les rapports des distances, c'est-à-dire que pour tous points A, B, C, $D(\neq C)$, d'images respectives A', B', C', $D'(\neq C')$ par T, on a $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$,*
2. *une transformation T du plan $\mathcal{P}$ est une similitude s'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tous points M et N du plan $\mathcal{P}$, d'images respectives M' et N', on ait $M'N' = kMN$. Le réel k est appelé le rapport de la similitude.*

Définition 4 : *On appelle isométrie toute similitude de rapport* 1.

Propriétés :

1. *L'image d'un triangle par une similitude est un triangle semblable,*
2. *la transformation réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $1/k$,*
3. *la composée de deux similitudes de rapports respectifs k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 \times k_2$,*
4. *la composée dans un ordre quelconque d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$,*
5. *une similitude conserve les angles géométriques.*
6. ***Effet d'une similitude sur les configurations :*** *Toute similitude s de rapport $k > 0$:*
   - *multiplie les distances par k et les aires par k^2,*
   - *conserve les angles géométriques, donc le paralléllisme et l'orthogonalité,*
   - *conserve les alignements, les milieux, les intersections, les barycentres,*
   - *transforme une droite en une droite et un segment en un segment,*
   - *transforme un cercle de centre I et de rayon R en un cercle de centre $I' = s(I)$ et de rayon kR.*

3 Classification des similitudes planes :

Il existe deux sortes de similitudes :

1. celles qui conservent les angles orientés-ce sont les **similitudes directes**- en particulier, elles transforment un triangle en un triangle directement semblable, c'est-à-dire que les angles du triangle et ceux du triangle-image sont dans le même sens,
2. celles qui transforment les angles orientés en des angles opposés-ce sont les **similitudes indirectes** ou **similitudes inverses**- en particulier, elles transforment un triangle en un triangle inversement semblable, c'est-à-dire que les angles du triangle et ceux du triangle-image sont en sens contraire.

Propriété caractéristique des similitudes planes :

1. *Une transformation s du plan est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est de la forme $s(z) = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, et z est l'affixe dans le plan complexe d'un point M quelconque du plan, et $s(z)$ celui de l'image de M dans la similitude,*
2. *une transformation s du plan est une similitude indirecte si et seulement si son écriture complexe est de la forme $s(z) = a\overline{z} + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, et z est l'affixe dans le plan complexe d'un point M quelconque du plan, et $s(z)$ celui de l'image de M dans la similitude.*

Dans les deux cas, $|a|$ est appelé le rapport de la similitude.

3.1 Similitudes planes directes :

Soit s une similitude plane directe, dont l'expression dans le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est $s(z) = az+b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Définition 5 :

1. *On appelle* ***rapport*** *de la similitude s le réel strictement positif $k = |a|$, et* ***angle*** *de la similitude s le réel $\theta = \overline{Arg(a)}$ $[2\pi]$.*
   Si A et B sont deux points distincts du plan, d'images respectives A' et B' par s, alors pour tout point M du plan, d'image M' par s, on a $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ $[2\pi]$, et l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ est l'angle de la similitude s.
2. *Toute similitude plane directe autre que la translation ($a \neq 1$) admet un unique point fixe Ω appelé* ***centre*** *de la similitude, dont l'affixe ω est tel que $\omega = a\omega + b$, et donc $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.*

Remarques :

1. Si $a = 1$, la similitude s est une **translation**,
2. si $|a| = 1$, la similitude s est une **rotation** d'angle $Arg(a)$ $[2\pi]$,
3. si $\theta = 0$ $[2\pi]$, la similitude s est une **homothétie** de rapport $a \in \mathbb{R}$,
4. toute similitude plane directe de rapport 1 est appelée un **déplacement**. Tout déplacement est soit une translation, soit une rotation, soit l'identité.

♣

Théorème 1 *Toute similitude plane directe s de rapport k et d'angle θ est soit une translation, si $k = 1$ et $\theta = 0$, soit la composée dans n'importe quel ordre d'une rotation de centre Ω et d'angle θ et d'une homothétie de même centre Ω et de rapport k.*
Elle admet une écriture complexe de la forme $s(z) = \omega + ke^{\mathring{\imath}\theta}(z - \omega)$, ω étant l'affixe de Ω.

Théorème 2 : *Étant donnés quatre points A, B, A' et B', tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une unique similitude directe s transformant A en A' et B en B'. Elle a pour rapport $\dfrac{A'B'}{AB}$ et pour angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.*

Démonstration : Si la similitude existe, on peut l'exprimer en complexe par $s(z) = pz + q$. Soient a, b, a' et b' les affixes respectifs de A, B, A' et B'. On a $a \neq b$ et $a' \neq b'$. Les conditions $A' = s(A)$ et $B' = s(B)$ se traduisent par le système :

$$\begin{cases} pa + q &= a' \\ pb + q &= b'. \end{cases}$$

On en déduit que $p = \dfrac{b'-a'}{b-a}$, $q = \dfrac{ab'-ba'}{a-b}$, et donc $|p| = \dfrac{|b'-a'|}{|b-a|} = \dfrac{A'B'}{AB}$ et $arg(p) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ $[2\pi]$.
□

3.2 Similitudes planes indirectes :

Soit s une similitude plane indirecte, dont l'expression dans le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est $s(z) = a\overline{z} + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Théorème 3 : *Étant donné une droite Δ, toute similitude indirecte s est la composée de la symétrie σ d'axe Δ et d'une similitude directe s_1.*

Démonstration : Soit σ la symétrie d'axe Δ. On pose $s_1 = s \circ \sigma$. s_1 est la composée de deux similitudes, donc c'est une similitude. Comme s et σ sont des similitudes indirectes, elles transforment les angles orientés en leurs opposés, et s_1 conserve donc les angles orientés. s_1 est donc une similitude directe. Par ailleurs, on a $s_1 \circ \sigma = (s \circ \sigma) \circ \sigma = s \circ (\sigma \circ \sigma)$. Or $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, donc $s_1 \circ \sigma = s$. □

Théorème 4 : *Toute similitude ayant deux points fixes est soit l'identité, soit une symétrie axiale.*

Démonstration : Soit s une similitude, d'expression complexe $s(z) = az + b$ ou $s(z) = a\overline{z} + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, ayant deux points fixes I et $J (\neq I)$, d'affixes respectifs z_I et z_J.

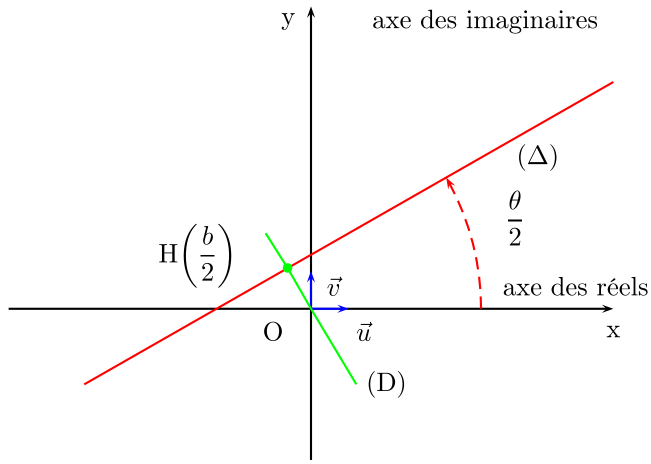
Si s est une similitude directe,

$$\begin{cases} z_I &= az_I + b \\ z_J &= az_J + b, \end{cases}$$

donc $z_I - z_J = a(z_I - z_J)$, et comme $z_I \neq z_J$, $a = 1$ et par suite $z_I = z_I + b$, donc $b = 0$. s est donc l'identité de $\mathcal{P}$.

Si s est une similitude indirecte, d'après le théorème 3, s est la composée de la symétrie σ d'axe (IJ) et d'une similitude directe s_1, donc $s = s_1 \circ \sigma$. D'où $s \circ \sigma = (s_1 \circ \sigma) \circ \sigma = s_1 \circ (\sigma \circ \sigma) = s_1$. Alors $s_1(I) = (s \circ \sigma)(I) = s(\sigma(I)) = s(I) = I$ et $s_1(J) = (s \circ \sigma)(J) = s(\sigma(J)) = s(J) = J$. Par suite s_1 est une similitude directe ayant deux points fixes, donc s_1 est l'identité du plan. Ainsi $s = \sigma$ et s est une symétrie axiale. □

Proposition (admise) : *Toute symétrie σ d'axe (Δ) a pour expression complexe $\sigma(z) = e^{\mathring{\imath}\theta}\overline{z} + b$, où $\dfrac{\theta}{2}$ est l'**angle polaire** de (Δ) (ou « inclinaison » de (Δ) par rapport à l'axe des réels, voir figure ci-dessous), et $\dfrac{b}{2}$ est l'affixe du pied H de la perpendiculaire (D) menée de l'origine O du repère sur la droite (Δ).*


y
axe des imaginaires
(Δ)
$\frac{\theta}{2}$
$H\left(\frac{b}{2}\right)$
$\vec{v}$
axe des réels
O
$\vec{u}$
x
(D)