NOMBRES COMPLEXES

Jean Chanzy

Université de Paris-Sud *

1 Nécessité d'introduire l'ensemble $\mathbb{C}$:

Considérons l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$. Elle a pour solution évidente $x = 4$. Le trinôme $x^3 - 15x - 4$ se factorise en $(x-4)(x^2+bx+1)$. Calculons b : $(x-4)(x^2+bx+1) = x^3+(b-4)x^2+(1-4b)x-4$, donc $b-4=0$ et $1-4b=-15$, et par conséquent, $b=4$. Le trinôme $x^2+4x+1=(x+2)^2-3$ se factorise en $x^2+4x+1=(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$. Le trinôme $x^3-15x-4$ a donc trois racines réelles.

Les formules de Cardan donnent les solutions d'une équation du type $x^3+px-q=0$. On les trouve de la manière suivante :
On pose $x=u+v$, on calcule $x^3=(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=-px+q$.
On prend alors :

$$\begin{cases} 3uv & = -p \\ u^3+v^3 & = q. \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} u^3+v^3 & = q \\ u^3v^3 & = -\dfrac{p^3}{27}. \end{cases}$$

u^3 et v^3 sont donc solutions de l'équation $X^2-qX-\dfrac{p^3}{27}=0$. $\Delta=q^2+4\dfrac{p^3}{27}$, donc si $\Delta>0$,

$$\begin{cases} u^3 & = \dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}} \\ v^3 & = \dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}, \end{cases}$$

donc une solution de l'équation $x^3+px-q=0$ est :

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Cependant, si on reprend l'exemple précédent, avec $q=4$ et $p=-15$, on a $\Delta=-484$, donc pas de solution réelle pour u^3 et v^3, et par suite pas de solution réelle pour $x=u+v$. Or, on a vu que l'équation $x^3-15x-4=0$ avait trois solutions réelles. Cette contradiction conduit à introduire un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{R}$, et dans lequel toute équation polynomiale aura autant de solutions que le degré du polynôme figurant au premier membre de l'équation.

2 Les nombres complexes :

2.1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

Définition 2.1. *On appelle « imaginaire pur » l'une des deux racines du polynôme x^2+1. On le note $\mathring{i}$, et il vérifie $\mathring{i}^2=-1$.*

*Université de Paris-Sud,Bâtiment 425;F-91405 Orsay Cedex

Définition 2.2. *On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres de la forme $x + \mathring{i}y$, où x et y décrivent $\mathbb{R}$. On les appelle des nombres complexes.*

Théorème 1 *Tout nombre complexe z admet une écriture unique $z = x + \mathring{i}y$, où x et y sont des nombres réels. Cette écriture s'appelle la* ***forme algébrique*** *de z, x s'appelle la* ***partie réelle*** *de z, notée $\mathcal{R}\mathbf{e}(\mathbf{z})$, et y la* ***partie imaginaire*** *de z, notée $\mathcal{I}\mathbf{m}(\mathbf{z})$.*

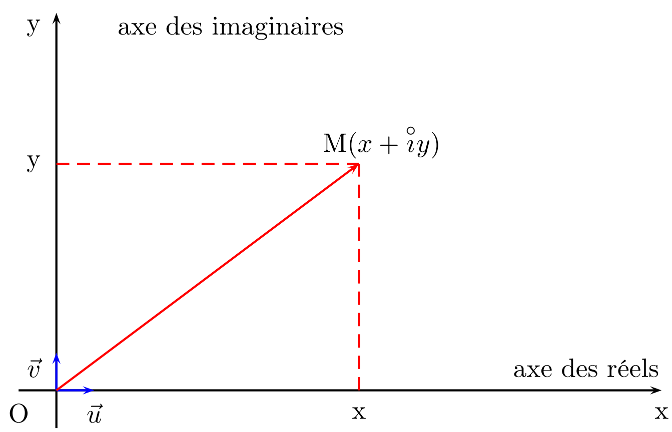
Remarque : On notera $\mathfrak{I}$ l'ensemble des nombres imaginaires : $\mathfrak{I} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ et } z = 0 + \mathring{i}y;\ y \in \mathbb{R}\}$. On peut également le noter $\mathring{i}\mathbb{R}$. ♣

2.2 Le plan complexe :

Soit $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormé du plan.

Définition 2.3.

1. *À tout point M du plan, de coordonnées $M(x; y)$, on associe un unique nombre complexe $z = x + \mathring{i}y$, appelé* ***affixe*** *du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.*
2. *Réciproquement, tout nombre complexe $z = x + \mathring{i}y$ est représenté dans le repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ par un unique point M de coordonnées $M(x; y)$ ou un unique vecteur $\overrightarrow{OM}$, appelés respectivement* ***point-image*** *et* ***vecteur-image*** *de z.*
3. *On appelle* ***plan complexe*** *le plan constitué par tous les points-images (ou par tous les vecteurs-images) de tous les nombres complexes de l'ensemble $\mathbb{C}$.*
4. *L'axe horizontal du repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est appelé l'****axe des réels****, et tout nombre complexe de la forme $z = x + \mathring{i}0$ est un* ***réel*** *représenté par un point-image sur l'axe des réels ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).*
5. *L'axe vertical du repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est appelé l'****axe des imaginaires****, et tout nombre complexe de la forme $z = 0 + \mathring{i}y$ est appelé un* ***imaginaire pur*** *; il est représenté par un point-image sur l'axe des imaginaires.*



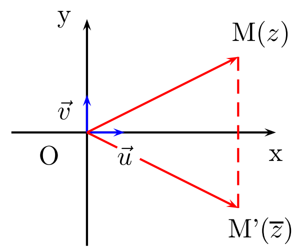
2.3 Opérations sur les nombres complexes :

2.3.1 Égalité de deux nombres complexes :

Théorème 2 *Soient z et z' deux nombres complexes. Alors $z = z' \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z')$ et $\mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(z')$.*

2.3.2 Conjugué d'un nombre complexe :

Définition 2.4. *Soit $z = x + \mathring{i}y$ un nombre complexe. On appelle* **nombre complexe conjugué de z** *le nombre complexe $\overline{z} = x - \mathring{i}y$. Son point-image M' est le symétrique de celui de z, noté M, par rapport à l'axe des réels.*



Propriétés de $\overline{\mathbf{z}}$: *Soit z un nombre complexe quelconque.*

1. $z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z)$,
2. $z - \overline{z} = 2\mathring{i}\mathcal{I}m(z)$,
3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} - z = 0$,
4. $z \in \mathfrak{I} \Leftrightarrow \overline{z} + z = 0$

Démonstration : Posons $z = x + \mathring{i}y$. Alors :

1. $z + \overline{z} = x + \mathring{i}y + x - \mathring{i}y = 2x$,
2. $z - \overline{z} = x + \mathring{i}y - (x - \mathring{i}y) = 2\mathring{i}y$,
3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow y = \dfrac{\overline{z} - z}{2\mathring{i}} = 0$,
4. $z \in \mathfrak{I} \Leftrightarrow z = \mathring{i}y \Leftrightarrow x = \dfrac{\overline{z} + z}{2} = 0$,

$\square$

2.3.3 Somme et produit de deux nombres complexes :

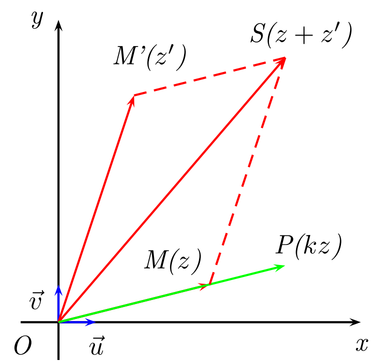
Soient $z = x + \mathring{i}y$ et $z' = x' + \mathring{i}y'$ deux nombres complexes.

Définition 2.5. *La somme de z et z' est définie par $z + z' = (x + x') + \mathring{i}(y + y')$. Le produit de z et z' est défini par :*

$$z \times z' = zz' = (x + \mathring{i}y)(x' + \mathring{i}y') = xx' + \mathring{i}yx' + \mathring{i}xy' + \mathring{i}^2 yy' = (xx' - yy') + \mathring{i}(xy' + yx').$$

Interprétation graphique

1. *Si M est le point-image de z et M' celui de z', le point-image de $z + z'$ est le point S tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$,*
2. *Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Si M est le point-image de z, alors le point P tel que $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OM}$ est le point-image de kz,*



2.3.4 Formules des affixes :

Propriétés

1. *Soient A et B deux points du plan, d'affixes respectifs z_A et z_B. Alors l'affixe de I, milieu du segment $[AB]$ est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$, et celui du vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ est $z_B - z_A$.*
2. *Soit (A_i, α_i), avec $i \in \mathbb{N}$ et $1 \leq i \leq n$, une famille de points A_i du plan, d'affixes respectifs z_{A_i}, affectés des coefficients α_i. Si G est le barycentre de ces points, son affixe est*

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \ldots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.$$

2.3.5 Inverse d'un nombre complexe :

Théorème 3 *Tout nombre complexe $z = x + \mathring{i}y$ non nul a un inverse dans $\mathbb{C}$, noté $\dfrac{1}{z}$, et tel que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{x^2 + y^2}$.*

2.3.6 Quotient de deux nombres complexes :

Définition 2.6. *Soient z et z' deux nombres complexes ($z \neq 0$). Le quotient de z' par z est défini par $\dfrac{z'}{z} = z' \times \dfrac{1}{z} = \dfrac{z'\overline{z}}{z\overline{z}}$.*

2.3.7 Conjugaison et opérations dans $\mathbb{C}$:

$\forall z = x + \mathring{i}y,\ z \in \mathbb{C}, \forall z' = x' + \mathring{i}y',\ z' \in \mathbb{C}$

1. $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$,
2. $\overline{\overline{z}} = z$,
3. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$,
4. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$,
5. Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$,
6. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \neq 0, \overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

2.4 Équations du second degré à coefficients réels :

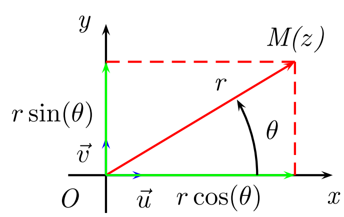
Soient a, b, et c trois réels, avec $a \neq 0$, et l'équation $az^2 + bz + c = 0$. On appelle discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$, le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Le trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$ se factorise alors en $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$.
2. Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle double $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$. Le trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$ se factorise alors en $P(z) = a(z - z_0)^2$.
3. Si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-b - \mathring{\imath}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \mathring{\imath}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \overline{z_1}$. Le trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$ se factorise alors en $P(z) = a(z - z_1)(z - \overline{z_1})$.

2.5 Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe :

2.5.1 Module et arguments d'un nombre complexe :

Définition 2.7. *Soient z un nombre complexe, et M son point-image dans le plan complexe, repéré dans le repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ par ses coordonnées polaires (r, θ). On appelle alors r le module de z, noté $|z|$, et θ un argument de z, noté $\arg(z)$ et défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).*



Ainsi $|z| = r = OM > 0$, *et* $\arg(z) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Remarque : Si z est un réel, alors le module de z coïncide avec sa valeur absolue. ♣

2.5.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

Définition 2.8. *Soit $z = x + \mathring{\imath}y$ un nombre complexe. Si on factorise z par son module $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, on obtient la **forme trigonométrique** de z, $z = |z|\left(\cos(\theta) + \mathring{\imath}\sin(\theta)\right)$, avec $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Le nombre complexe $u = \cos(\theta) + \mathring{\imath}\sin(\theta)$ a pour module $|u| = 1$.*

Propriétés

1. $|z|^2 = z \times \overline{z}$ *et* $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}}$,
2. *Deux nombres complexes non nuls z et z' sont égaux si et seulement si $|z| = |z'|$ et* $\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$,
3. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\overline{z}| = |-z| = |z| = \sqrt{z\overline{z}}$,
4. $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$,

5. $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\forall z' \in \mathbb{C}^*$, $|zz'| = |z||z'|$ *et* $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$,
6. $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\forall z' \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ *et* $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ *et* $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
7. ***Formule de Moivre :*** $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos(n\theta) + \mathring{\imath}\sin(n\theta) = \Big(\cos(\theta) + \mathring{\imath}\sin(\theta)\Big)^n$. *Cette formule sert à exprimer* $\cos(n\theta)$ *et* $\sin(n\theta)$ *en fonction de* $(\cos(\theta))^p$ *et* $(\sin(\theta))^p$, *pour* $0 \leq p \leq n$, *et* $(\cos(\theta))^n$ *et* $(\sin(\theta))^n$ *en fonction de* $\cos(p\theta)$ *et* $\sin(p\theta)$. *En particulier, elle permet de linéariser* $(\cos(\theta))^n$ *et* $(\sin(\theta))^n$ *pour les calculs d'intégrales.*

2.5.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe :

Soit $u = \cos(\theta) + \mathring{\imath}\sin(\theta)$ un nombre complexe de module $|u| = 1$. On vérifie facilement que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall \theta' \in \mathbb{R}$, $\Big(\cos(\theta) + \mathring{\imath}\sin(\theta)\Big) \times \Big(\cos(\theta') + \mathring{\imath}\sin(\theta')\Big) = \cos(\theta + \theta') + \mathring{\imath}\sin(\theta + \theta')$, et par conséquent la fonction complexe de θ définie par $f(\theta) = \cos(\theta) + \mathring{\imath}\sin(\theta)$ vérifie la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle. On note alors $\cos(\theta) + \mathring{\imath}\sin(\theta) = e^{\mathring{\imath}\theta}$.

Définition 2.9. *Tout nombre complexe* z *non nul, de module* $r \neq 0$, *et d'argument* θ *peut s'écrire* $z = re^{\mathring{\imath}\theta}$. *Cette écriture s'appelle la forme exponentielle de* z.

Propriétés

1. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall \theta' \in \mathbb{R}$, $e^{\mathring{\imath}\theta}e^{\mathring{\imath}\theta'} = e^{\mathring{\imath}(\theta+\theta')}$,
2. $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{e^{\mathring{\imath}\theta}} = e^{-\mathring{\imath}\theta} = \overline{e^{\mathring{\imath}\theta}}$,
3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall \theta' \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{\mathring{\imath}\theta'}}{e^{\mathring{\imath}\theta}} = e^{\mathring{\imath}(\theta'-\theta)}$,
4. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(e^{\mathring{\imath}\theta})^n = e^{\mathring{\imath}n\theta}$.
5. ***Formules d'Euler :*** $\forall \theta \in \mathbb{R}$, *on a* $\cos(\theta) + \mathring{\imath}\sin(\theta) = e^{\mathring{\imath}\theta}$ *et* $\cos(\theta) - \mathring{\imath}\sin(\theta) = e^{-\mathring{\imath}\theta}$. *Par addition et soustraction membre à membre de ces deux égalités, on obtient les formules d'Euler :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{\mathring{\imath}\theta} + e^{-\mathring{\imath}\theta}}{2} \ \text{ et } \ \sin(\theta) = \frac{e^{\mathring{\imath}\theta} - e^{-\mathring{\imath}\theta}}{2\mathring{\imath}}.$$

3 Nombres complexes et géométrie :

3.1 Angles orientés de vecteurs :

Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe, avec leurs affixes respectifs z_A, z_B, z_C et z_D. On a alors le théorème suivant :

Théorème 4

1. $AB = |z_B - z_A|$ *et* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$,
2. $\frac{CD}{AB} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$ *et* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Théorème 5 *Soient* $\overrightarrow{V}$ *et* $\overrightarrow{U}$ *deux vecteurs du plan. Le quotient de ces deux vecteurs* $\frac{\overrightarrow{V}}{\overrightarrow{U}}$ *peut être considéré comme un nombre complexe de module* $\frac{\left\|\overrightarrow{V}\right\|}{\left\|\overrightarrow{U}\right\|}$ *et d'argument* $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3.2 Équations paramétriques d'un cercle :

Définition 3.1. *Avec les nombres complexes, le cercle $(\mathcal{C})$ de centre Ω, ayant pour affixe ω, et de rayon r, est l'ensemble $(\mathcal{C}) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - \omega| = r\}$. L'égalité $z = \omega + re^{\mathring{\imath}\theta}$ constitue une équation paramétrique du cercle $(\mathcal{C})$, de paramètre $\theta \in [0, 2\pi[$. On retrouve les équations paramétriques classiques en prenant les parties réelle et imaginaire de cette égalité :*

$$\begin{cases} x &= x_\Omega + r\cos(\theta) \\ y &= y_\Omega + r\sin(\theta). \end{cases}$$

3.3 Transformations du plan :

On s'intéresse à la fonction complexe :

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) = az + b, \end{aligned}$$

avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Cette transformation induit une transformation du plan entre le point-image de z et le point-image de $f(z)$. Les propriétés de cette transformation dépendent de la valeur de a et de b.

3.3.1 Identité :

Si $a = 1$, et $b = 0$, f est la fonction « Identité » $f(z) = z$.

3.3.2 Translation :

Si $a = 1$, f est une translation de vecteur $\overrightarrow{t}$ d'affixe b. f n'a , bien sûr, pas de point fixe (ou point invariant).

3.3.3 Homothétie :

Si $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, f est une homothétie de rapport a, et dont le centre est le point Ω, point fixe (ou point invariant) de f. L'affixe de Ω, soit ω, vérifie $\omega = a\omega + b$, donc $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. On note cette homothétie $h = Hom(\Omega, a)$. Elle peut s'écrire $h(z) = \omega + a(z - \omega)$.

3.3.4 Rotation :

Si $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, avec $|a| = 1$, f est une rotation d'angle $\theta = \arg(a) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), et dont le centre est le point Ω, point fixe (ou point invariant) de f. L'affixe de Ω, soit ω, vérifie $\omega = a\omega + b$, donc $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. On note cette rotation $\rho = Rot(\Omega, \theta)$. Elle peut s'écrire $\rho(z) = \omega + e^{\mathring{\imath}\theta}(z - \omega)$.

3.3.5 Similitude directe :

Si $a \in \mathbb{C}$, et n'est dans aucun des quatre cas précédents, f est une similitude directe (voir cours de spécialité). Son expression complexe est de la forme $f(z) = \omega + a(z - \omega)$, avec $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.